Resumen de Memorias

VI Simposio Internacional de Ingeniería Industrial

Actualidad y Nuevas Tendencias 2013

ISSN: 1856-8343

Coordinadores:
Dra. Karelys Osta Trestini
Dr. Fernando Salazar Arrieta
Dr. Agustín Mejías Acosta

Bogotá, 24 al 26 de julio de 2013
Colombia

Universidad de los Andes

Red14

Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

Memorias
"Simposio Internacional de Ingeniería Industrial: Actualidad y Nuevas Tendencias"
Depósito Legal Nº pp200708CA116
ISSN: 1856-8343

Coordinación 6ta. Edición SIII2013:
Karelys Osta Trestini
Fernando Salazar Arrieta
Agustín Mejías Acosta

Revisión: Dra. (C) Carmen Guédez

El VISIII2013 y sus productos académicos han sido financiados con el aporte de los siguientes patrocinantes:

Todos los trabajos presentados en el "VI Simposio Internacional de Ingeniería Industrial: Actualidad y Nuevas Tendencias 2013", han sido sometidos a un proceso de doble arbitraje ciego.

Índice

GESTIÓN DE LA CALIDAD **31**

Utilización de la Metodología MUSA y su Aplicación en el Estudio para Monitorear Periódicamente la Satisfacción de Estudiantes de la Universidad de los Andes ESAT **33**

Utilization of the MUSA Methodology and its Application in the Study Periodically to Monitor the Students Satisfaction of Universidad de los Andes: ESAT 33

Natalia Carrero Siabato[1], Ciro Alberto Amaya[2] 33

Propuesta para Evaluar la Capacidad de un Proceso con Múltiples Características de Calidad **48**

Proposal to Measure the Ability of a Process with Multiple Quality Characteristics 48

Guillermo Cuamea[1], Carlos Anaya[2],Guadalupe Luna[3] 48

Análise da Aplicabilidade do Programa Seis Sigma na Construção Civil: Estudo no Departamento de Orçamentos **60**

Applicability Analysis of Six Sigma Program in Construction: Study in the Budgets Department 60

Liane Werner[1], Marcella S. Piccoli[2], Thays S. Saavedra[3] 60

La Técnica de las 5 "S" como Estrategia de Mejora Continua en una Microempresa de Inyección de Plástico **73**

The Technique of the Five S's as Strategy of Continuous Improvement in a Micro Plastic Injection 73

Silvia Galicia Villanueva[1], Hemán Espinosa Galicia[2], María Luisa Flores[3] 73

La Calidad de Servicio como Mecanismo de Mejora en el Sistema de Transporte Metrobus, Cd. de México **87**

Service Quality Improvement as a Mechanism of Transportation System Metrobus, Mexico City 87

Silvia Galicia Villanueva[1], Hemán Espinosa Galicia[2], María Luisa Flores[3] 87

SERVQUAL-SERVPERF: Pertinencia en la Medición de la Calidad del Servicio del Área de Urgencias Hospitalarias **99**

SERVQUAL-SERVPERF: Relevance in Measuring Service Quality in the Emergency Department 99

Alfonso Cisneros Campos[1], Jaime León Duarte[2], José Lozano Taylor[3] 99

Análisis de la Calidad de los Servicios Académicos. Revisando un Estudio de Caso en una Universidad Venezolana **110**

Analysis of Academic Services Quality. Reviewing a Case Study in a Venezuelan University 110

Roselin Santamaría P.[1], Agustín Mejías Acosta[2] 110

GERENCIA ESTRATÉGICA **121**

Modelagem da Estrutura e Modelo Organizacional: Um Estudo de Caso **123**

Modeling Structure and Organizational Model: A Case Study 123

Mateus Dalci[1], Maria Tinoco[2] 123

Modelo Conceptual de las 4 Dimensiones del Mundo de la Empresa. Formulación Matemática y Contenido Empírico **137**

Conceptual Model of 4 Dimensions of the Enterprise World. Mathematical Formulation and Empirical Content 137

Adolfo Acevedo Borrego[1], Carolina Linares Barrantes[2] 137

Paradigma Racional y el Rol Cambiante del Ingeniero Industrial en la Gestión de las Organizaciones **148**

Rational Paradigm and Changing Role of the Industrial Engineer in the Management of Organizations 148

Adolfo Acevedo Borrego[1], Carolina Linares Barrantes[2] 148

Propuesta para Evaluar la Capacidad de un Proceso con Múltiples Características de Calidad

Proposal to Measure the Ability of a Process with Multiple Quality Characteristics

Guillermo Cuamea[1], Carlos Anaya[2],Guadalupe Luna[3]

Universidad de Sonora. México. [1] gcuamea@industrial.uson.mx, [2] canaya@industrial.uson.mx, [3] lupita_11_56@hotmail.com

Resumen

Los productos manufacturados tienen varias características de calidad que son importantes para el cliente. Cuando las características de calidad no están correlacionadas, se usan varios índices, tales como el Cp, Cpk, Cpm para evaluar la capacidad que tiene el proceso de producir productos de calidad. Para el caso contrario, se encontró en la revisión de literatura, índices de capacidad propuestos para medir la capacidad de un proceso cuando las características de calidad están correlacionadas. La mayoría de las propuestas coinciden en que debe definirse una región de especificación que represente lo que el cliente desea y otra región de variación del proceso que muestre el desempeño que tiene el proceso. Adicionalmente, como resultados de la revisión anterior, se observa que los autores difieren en la forma de definir ambas regiones, oportunidad que se aprovecha para presentar una nueva propuesta, mediante la cual se definen de una manera confiable ambas regiones y que al compararlas se obtienen un par de índices de capacidad multivariados Cpm y Cpkm, que son extensiones de los índices univariados Cp y Cpk. Al final se prueban los índices propuestos en escenarios diferentes.

Palabras Clave: Índices de Capacidad Multivariados, Región de Especificación, Región de Variación

Abstract

The manufactured products have several quality characteristics that are important for the customer. When the quality characteristics are not correlated, using several indices, such as Cp, Cpk, Cpm to assess the ability of the process to produce quality products. For the opposite case was found in the literature review, proposed capability indices to measure the ability of a process when the quality characteristics are correlated. Most proposals agree that should define a specification region that represents what the customer wants, and another region of process variation that shows performance having the process. Additionally, as a result of the review, it was observed that different authors differ on how to define both regions, an opportunity that is used to present a new proposal, in which these regions are defined in a reliable manner and are compared, resulting in a pair of multivariate capability indices Cpm and Cpkm, which are extensions of univariate indexes Cp and Cpk. In the end, the proposed indices are tested in different scenarios.

Key Words: Multivariate Capability Indices, Specification Region, Region of Variation

3.4.1.1. Introducción

La mayoría de los productos manufacturados hoy en día tienen varias características de calidad que son importantes para el cliente. Para saber si el proceso actual, posee la habilidad para reproducir estas características de calidad en los productos, se debe analizar la capacidad que tiene el proceso, es decir comparar el desempeño actual del proceso contra los requerimientos del cliente. Los estudios de capacidad tradicionales tratan a los productos como si solo tuvieran una característica crítica de interés. Sin embargo la gran mayoría de los productos tienen múltiples características que son de interés para el cliente, Bothe (1992). Todas estas características críticas deben estar dentro de sus respectivas especificaciones para que el producto se considere aceptable. Si solo una de ellas no cumple con las especificaciones, esto será suficiente para que el cliente considere inaceptable el producto.

Los estudios de capacidad de procesos se pueden clasificar en dos categorías. La primera categoría seria para los estudios de capacidad en el dominio univariado y la segunda categoría para estudios de capacidad en el dominio multivariado. Dentro de la primera categoría, para medir que tanta habilidad tiene un proceso para reproducir las características de calidad en un producto, hace necesario analizar la capacidad del mismo. Actualmente existen varios índices utilizados para este propósito, dos de los índices más conocidos y usados son el *Cp* y el *Cpk*, llamados también índices de capacidad potencial y real del proceso respectivamente. Dichos índices se usan bajo el supuesto de que el valor de las mediciones de las características de calidad representa valores de variables aleatorias independientes con distribución normal y que el proceso se encuentra en control estadístico, como lo establece Montgomery (2009). Juran (1974), presentó el índice de capacidad *Cp* el cual no requiere conocer la localización del proceso, por otro lado Kane (1986), presentó un índice de capacidad que toma en cuenta la localización del proceso, este índice es el *CpK*. Estos índices están definidos por las ecuaciones (1) y (2), donde LSL es el límite de la especificación inferior y USL es el límite de la especificación superior.

$$C_p = \frac{(USL - LSL)}{6\sigma} \tag{1}$$

$$C_{pk} = min\left\{\frac{(USL - \mu)}{3\sigma}, \frac{(\mu - LSL)}{3\sigma}\right\} \tag{2}$$

Sin embargo, el *CpK* no toma en cuenta si la localización del proceso difiere o no del valor meta *T*. Para corregir este problema se creó el índice *Cpm*, el cual se muestra en la ecuación (3), el cual supone que el valor meta *T*, se encuentra en el centro de las especificaciones.

$$Cpm = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{3}$$

Para aquellos casos donde el valor de T no se encuentre en el centro de las especificaciones, Pearn & Johnson (1992), desarrollaron el índice *Cpmk*, el cual es una combinación del *CpK* y del *Cpm*. La forma de calcular este índice se presenta mediante la ecuación (4). Desde entonces, varias medidas de la capacidad de un proceso han sido presentadas por diversos

autores después de 1980, por ejemplo Kotz & Johnson (2002), Spiring, Leung, Cheng & Yeung (2003), Yum & Kim (2011) y Wu, Pearn & Kotz (2009).

$$Cpmk = min\left[\frac{(USL-\mu)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}, \frac{(\mu-LSL)}{\sigma^2+(\mu-T)^2}\right] \quad (4)$$

Para la categoría de estudios de capacidad en el dominio multivariado también se han propuesto algunos índices de capacidad que son extensiones de sus contrapartes univariado y como lo señala Foster, Barton y Gautam (2005), aun no hay una metodología que sea consistente para calcular índices de capacidad multivariados, por lo tanto a la fecha, no existe consenso sobre el uso de un índice en particular. De aquí se desprende que se hace necesario evaluar la capacidad de un proceso que tiene muchas variables correlacionadas, pero esto se hace complejo para calcular y comprender. Las investigaciones sobre índices de capacidad multivariados, empezaron a realizarse a principios de los 90´s, pero fue hasta el 2005 cuando el número de publicaciones se incrementó. El desarrollo de los índices de capacidad multivariados, inició a principios de 1990 y desde entonces diferentes índices de capacidad han sido presentados y se pueden dividir en cuatro grupos diferentes, como lo sugieren Shinde y Khadse (2009). Los grupos son: grupo 1, basados en la razón de una región de tolerancia y una región del proceso, ver como un ejemplo Taam y Liddy (1993); el grupo 2, se basa en la probabilidad de producto no conforme, ver como ejemplo a Castagliola y Castellanos (2005); el grupo 3 se basa sobre el análisis de componentes principales, ver como ejemplo, Wang y Chen (1998); y un grupo 4 llamado otros, ver como ejemplo, Shahriari y Lawrence (1995). También se puede observar que la mayoría de los índices propuestos requieren de una distribución normal multivariada y también se puede observar que la mayoría de ellos pertenecen al primer grupo. En la tabla 1 se muestra un resumen de los índices que se encuentran en la literatura desde 1993 hasta el 2011, en la tabla la columna DNM, significa que si el cálculo del índice propuesto requiere o no de una distribución normal multivariada y en la última columna se establece el grupo al que pertenece el índice de capacidad propuesto.

3.4.1.2. Medición de la capacidad de un proceso multivariado

La metodología seguida en esta propuesta, inicia con el supuesto de que las *v* características de calidad al ser analizadas en forma conjunta, pueden modelarse a través de la distribución normal multivariada y que el proceso se encuentra en control estadístico. Como un requisito se debe contar con especificaciones para cada una de las *v* características de calidad y con estimaciones de los parámetros del proceso, tales como: un vector de medias y una matriz de varianzas covarianzas. Posteriormente las especificaciones son utilizadas para definir la región de especificación y la estimación de los parámetros del proceso se utilizan para crear una región de variación del proceso, utilizando los límites de tolerancia natural del proceso. Finalmente para obtener los índices de capacidad se obtiene una razón de ambas regiones.

La propuesta se enfoca en extender el proceso de medición de la capacidad de un proceso con una sola característica de calidad, hacia un proceso con múltiples características de calidad. A partir de la definición clásica del C_p y del C_{pk} se desarrollarán ecuaciones equivalentes, las cuales permitirán su aplicación al caso multivariado y que además podrán

Tabla 1. Resumen de Índices de Capacidad encontrados en la, literatura en el periodo de 1993-2011

AÑO	AUTOR	ÍNDICE	DNM	GRUPO
1993	Taam y Liddy	MC_{pm}	Si	1
1994	Chen	MC_p	Si	1
1995	Shahriari y Lawrence	$MPCV$	Si	4
1998	Wang y Chen	MC_p, MC_{pk}, MC_{pm} y MC_{pmk}	Si	1 y 3
2000	Wang y Du	MC_p y MC_{pc}	Si	1 y 3
2001	Yeh y Chen	MC_f	No	2
2005	Castagliola yCastellanos	BC_p y MC_{pk}	Si	2
2005	Wang	MC_p y MC_{pk}	Si	1 y 3
2006	Wang	MC_{pc}	No	4
2007	Pearn, Wang y Yen	MC_p	Si	1
2008	Castagliola y Castellanos	BC_p y BC_{pk}	No	2
2009	Shahriari y Abdollahzadeh	$NMPCV$	Si	1
2009	Ahmad, Abdollahian, Zeephongsekul y Abbasi	PNC_{Total}	No	2
2009	González y Sánchez	C_n^s	Si y No	2 y 3
2009	Shinde y Khadse	$Mp1$ y $Mp2$	Si	2 y 3
2010	Pan y Lee	NMC_{pm}	Si	1
2011	Goethals y Cho	MC_{pmc}	Si	4

ser utilizadas en la modificación de un proceso cuando éste no sea adecuado. La definición clásica del C_p, está representada por la ecuación (1). En esta ecuación no interviene la localización del proceso o sea la media de la variable o característica de calidad, para la cual se desea establecer si el proceso es capaz o no cumplir, por lo que puede pensarse en un proceso hipotético centrado en las especificaciones, esto es, en un proceso cuya media es $\mu_c = (USL + LSL)/2$ y para el cual las distancias desde cualquiera de las especificaciones al punto medio toman el mismo valor, $\mu_c - LSL = USL - \mu_c$. Bajo el supuesto de normalidad en la que la media es ahora la media centrada en las especificaciones y con la misma variabilidad del proceso original (lo que es equivalente a una traslación de la distribución original) se pueden realizar las siguientes operaciones algebraicas que no alteran el valor original obtenido con la ecuación clásica:

Por lo tanto, la ecuación (1), considerando el supuesto anterior se puede reescribir como la ecuación (5), que se muestra a continuación:

$$C_p = \frac{(USL - LSL)/2}{3\,\sigma} \tag{5}$$

Haciendo operaciones algebraicas podríamos también representarlo como se muestra en las ecuaciones (6) y (7):

$$C_p = (\mu_c - LSL)/3\sigma \tag{6}$$

Una manera equivalente sería:

$$C_p = (USL - \mu_c)/3\sigma \tag{7}$$

Donde μ_c vendría a ser el valor que tomaría la variable o característica de calidad, cuando esta es igual al valor nominal o promedio de las especificaciones. Si se continúa realizando operaciones algebraicas, se tiene que la ecuación original del índice C_p, también se puede representar como se muestra en las ecuaciones (8) y (9):

$$C_p = (\mu_c - LSL)/3\sigma = \frac{Zc}{3} = \sqrt{\frac{Z_c^2}{9}} = \sqrt{\frac{\chi_{c,1}^2}{9}} \tag{8}$$

y por supuesto de una manera equivalente a:

$$C_p = (USL - \mu_c)/3\sigma = \frac{Zc}{3} = \sqrt{\frac{Z_c^2}{9}} = \sqrt{\frac{\chi_{c,1}^2}{9}} \tag{9}$$

Las ecuaciones (8) y (9), corresponden al cálculo de la capacidad de un proceso univariado, ya que toda normal estándar al cuadrado corresponde a una Ji cuadrada con un grado de libertad y el valor de 9 corresponde por lo tanto, a una Ji cuadrada con un grado de libertad y una confianza de 0.9973). Por lo tanto se tiene una ecuación equivalente para el cálculo del Cp y que se relacionará con procesos multivariados a través de la distancia de Mahalanobis (es una medida de distancia y se usa como una forma de determinar la similitud entre dos variables aleatorias tomando en cuenta la correlación entre las variables), cuya distribución de probabilidad corresponde a una Ji cuadrada con grados de libertad igual al número de variables o características de calidad del proceso.

Antes de discutir la propuesta del mecanismo para el cálculo del Cp en el caso multivariado, es conveniente indicar el significado de este índice en el caso univariado, propiedad que deberá ser extrapolado al caso multivariado. Supóngase que Cp = 1, esto implica que el valor actual de la desviación estándar de la característica de calidad es el máximo valor permisible para que el proceso sea capaz potencialmente para producir piezas dentro de las especificaciones. En cambio, supóngase que Cp = 0.85, esto implica que si se mantienen las mismas especificaciones, la desviación estándar actual deberá disminuirse para tener un proceso capaz. Se puede verificar que el nuevo valor deberá ser $\tilde{\sigma} = C_p\sigma$, ya que al dividir ambos lados de la ecuación clásica para el Cp se obtiene: $1 = (USL - LSL)/6C_P\sigma$. Por lo tanto el Cp implica, en el caso de ser menor a la unidad, la porción en la cual deberá disminuirse, la desviación actual para que un proceso sea potencialmente capaz. En cambio, cuando el valor es superior a la unidad, implica hasta cuanto crecimiento podrá ser soportado por el proceso actual para seguir siendo capaz potencialmente de cumplir con las especificaciones. Esta propiedad debe ser satisfecha por la propuesta que se haga para un índice multivariado.

2.1. Presentacion del índice *Cpm*

Peña (2002), establece que una de las propiedades básicas de la distribución normal k-dimensional, es que toda curva de nivel para una distribución normal multivariada es un elipsoide que abarca una determinada confianza $(1-\alpha)$ y cuya distribución es una Ji cuadrada con grados de libertad igual al número de variables. Para cualquier valor particular de cualquiera de las variables aleatorias se le puede asociar un elipsoide con confianza $1-\beta_i$ y del desarrollo de la ecuación basada en valores Ji cuadrada, se propone la ecuación (10), para el cálculo del C_p en el caso multivariado:

$$C_{pm} = min\left\{\sqrt[2]{\frac{\chi^2_{\beta_i}}{\chi^2_{0.0027,m}}} \mid i = 1, 2, \dots, m\right\} \quad \text{donde } \chi^2_{\beta_i} = (LSL_i - \mu_{ci})^2 / \,|\Sigma|\,\left|\Sigma_i^{-1}\right| \qquad (10)$$

Esta ecuación es consistente con el caso univariado en el siguiente sentido: si todas las desviaciones estándares de las variables involucradas en el proceso son modificadas mediante $\tilde{\sigma}_i = C_{pm}\,\sigma_i$ entonces el proceso será capaz potencialmente de cumplir con todas las especificaciones de manera simultánea. Para demostrar lo anterior se requiere de la propiedad del producto escalar de las matrices y del hecho de que $|\,\lambda\,\Sigma\,| = \lambda^m\,|\Sigma\,|$. Si se sustituyen los valores $\tilde{\sigma}_i$ en la matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ entonces los valores en la diagonal principal tomarán la forma $C^2_{pm}\sigma^2_i$ mientras que los valores de la covarianza situada en el renglón i y columna j toma el valor $C^2_{pm}\,\sigma_i\,\sigma_j$. Por lo tanto la nueva matriz de varianzas-covarianzas está dada por: $\tilde{\Sigma} = C^{2m}_{pm}\,\Sigma$ por lo que se cumple que $\left|\tilde{\Sigma}\right| = C^{2m}_{pm}\,|\,\Sigma\,|$. De la misma forma, se tiene que $\left|\widetilde{\Sigma^{-1}}\right| = \frac{1}{|\,\tilde{\Sigma}\,|} = \frac{1}{C^{2m}_{pm}\,|\,\Sigma\,|}$ y que $\left|\widetilde{\Sigma_i^{-1}}\right| = C^{-2m+2}_{pm}\,|\,\Sigma_i^{-1}|$. Recordando que los límites de tolerancia natural del proceso, para la característica de calidad i vienen dados por: $LTN_i = \mu_{ci} \mp \sqrt[2]{|\,\tilde{\Sigma}|\,\left|\widetilde{\Sigma_i^{-1}}\right|\chi^2_{0.0027}}$, realizando las sustituciones correspondientes y haciendo las operaciones pertinentes, se llega a:

$LTN_i = \mu_{ci} \mp \sqrt[2]{C^2_{pm}\,|\,\Sigma\,|\,\left|\Sigma_i^{-1}\right|\chi^2_{0.0027}} = \mu_{ci} \mp \sqrt[2]{\frac{\chi^2_\beta\,|\,\Sigma\,|\,\left|\Sigma_i^{-1}\right|\,\chi^2_{0.0027}}{\chi^2_{0.0027}}}$. Simplificando se llega a que $LTN_i = \mu_{ci} \mp \sqrt[2]{|\,\Sigma\,|\left|\Sigma_i^{-1}\right|\chi^2_\beta}$. Esta última ecuación nos indica que si $C_p < 1$ entonces $\chi^2_\beta < \chi^2_{0.0027}$ y por lo tanto, los límites naturales del proceso, si estuviese centrado, quedarían dentro de las especificaciones, con excepción de aquélla para la cual se ha obtenido el valor χ^2_β, cuyos límites naturales serán exactamente iguales a sus especificaciones mínima y máxima. Un aspecto importante que debe ser recalcado es el referente a que la cantidad de valores que deben ser comparados en la obtención del C_p es igual al número de variables o características del proceso, debido a considerarlo hipotéticamente centrado en sus especificaciones y a que por lo tanto el valor mínimo como máximo para cada variable están a la misma distancia del centro.

2.2. Obtención del Cpkm

Un razonamiento similar al del apartado anterior permite establecer como ecuación para el cálculo del C_{pkm} , el cual si considera la ubicación actual del proceso sería el siguiente:

$$C_{pkm} = \min\left\{ \sqrt[2]{\frac{\chi^2_{1\beta_i}}{\chi^2_{0.0027}}} \ , \ \sqrt[2]{\frac{\chi^2_{2\beta_i}}{\chi^2_{0.0027}}} \ \mid i = 1, 2, \dots, m \right\} \tag{11}$$

donde:

$\chi^2_{1\beta_i} = (LSL_i - \mu_i)^2 / |\Sigma| |\Sigma_i^{-1}|$, $\chi^2_{2\beta_i} = (USL_i - \mu_i)^2 / |\Sigma| |\Sigma_i^{-1}|$ y los valores medios corresponden al de las respectivas variables y no a los centros de las especificaciones. Debe observarse que por cada variable deben obtenerse dos valores posibles para el C_{pkm} por lo que deberán compararse, en general, 2m valores. En general los procesos no están centrados, por lo que $C_{pkm} < C_{pm}$ y conforme $\mu \to \mu_c$ entonces $C_{pkm} \to C_{pm}$.

2.3. Interpretación de los índices de capacidad

La interpretación de los índices anteriores, proporciona un entendimiento, de que tan bien el proceso es capaz de producir productos que cumplan con las especificaciones, lo cual puede verificarse mediante el evento $C_{pkm} \geq 1.0$, en caso contrario el proceso requiere ajustes.

- Cuando el $C_{pkm} < C_{pm}$, ajustes en el proceso serán requeridos, iniciando con colocar la media del proceso en el centro de las especificaciones.

- Cuando el $C_{pm} < 1$, además de los ajustes previos en l proceso, se requerirá una reducción en la variabilidad del proceso.

- Para conocer el grado de reducción en la variación de las características de calidad del proceso, se puede demostrar que los nuevos valores de la dispersión deberán ser $C_{pm}\sigma_i$, luego entonces se verifica que la matriz de covarianzas está dada por $C^2_{pm}\Sigma$ y su determinante tomara el siguiente valor $C^{2m}_{pm}|\Sigma|$. De la misma manera se cumple que $|\Sigma_i^{-1}|$ toma un valor igual a $C^{-2(m-1)}_{pm}|\Sigma_i^{-1}|$, de tal manera que se obtienen los siguientes resultados:

$$X_i = \mu_i \pm \sqrt{C^2_{pm}|\Sigma||\Sigma_{\mathrm{i}}^{-1}|\chi^2_{\alpha,v}} = \mu_i \pm \sqrt{\left(\frac{\chi^2_{\beta,v}}{\chi^2_{\alpha,v}}\right)|\Sigma||\Sigma_{\mathrm{i}}^{-1}|\chi^2_{\alpha,v}} = \mu_i \pm \sqrt{|\Sigma||\Sigma_{\mathrm{i}}^{-1}|\chi^2_{\beta,v}}$$

Cuando se cumple que $\chi^2_{\beta,m} < \chi^2_{\alpha,m}$, entonces el valor de X_i que se obtiene es menor o igual que el valor de la especificación correspondiente.

2.4. Ejemplos de ilustración

Durante la evaluación de la capacidad de un proceso se pueden encontrar tres escenarios posibles, los cuales se pueden enunciar de la manera siguiente:

Escenario 1. La región variación natural del proceso es más grande que la región de especificación, esto quiere decir que el proceso no cabe dentro de las especificaciones, por lo cual el valor de los índices de capacidad C_{pm} y C_{pkm}, serian ambos menores que 1.

Escenario 2. La variación natural del proceso, se encuentra justamente dentro de la región de especificación, lo cual quiere decir que el valor del C_{pm}=1 y si el proceso está localizado en el centro de la región de especificación, entonces el valor del C_{pkm} también será de 1, en caso contrario será menor de 1.

Escenario 3. La región variación natural del proceso es más pequeña que la región de especificación, esto quiere decir que al evaluar la capacidad, se deberán obtener valores de los índices de capacidad C_{pm} y C_{pkm}, mayores que 1.

Para ilustrar los dos primeros escenarios descritos anteriormente, se va a suponer que un producto posee dos características importantes de calidad X_1 y X_2 , para las cuales se toman 150 mediciones, al analizar estos datos en forma conjunta se obtiene los siguientes resultados:

La estimación de los promedios se presenta en el siguiente vector:

$$\mu_0 = [100 \quad 50]$$

La estimación de las varianzas y covarianzas se muestra en la siguiente matriz:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 25 & 24 \\ 24 & 36 \end{bmatrix}$$

Las especificaciones para cada una de las variables son: $X_1 = [85 \quad 115]$ y para $X_2 = [32 \quad 68]$, el determinante de la matriz de varianzas covarianzas es 275 y la inversa de dicha matriz se muestra enseguida:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1309 & -0.0909 \\ -0.0909 & 0.0909 \end{bmatrix}$$

Escenario 1

Ejemplo1. Dado que la localización del proceso se encuentra en el centro de las especificaciones, los límites de tolerancia natural para este proceso y para cada una de las variables son:

Para X_1 el límite de tolerancia inferior y superior son:

$$LTNI = 100 - \sqrt{(11.8290)(0.0909)(275)} = 82.8042$$

$$LTNS = 100 + \sqrt{(11.8290)(0.0909)(275)} = 117.196$$

Para X_2 el límite de tolerancia inferior y superior son:

$$LTNI = 50 - \sqrt{(11.8290)(0.1309)(275)} = 29.3647$$

$$LTNS = 50 + \sqrt{(11.8290)(0.01309)(275)} = 70.6353$$

El cálculo de los índices de capacidad para este escenario se obtiene primero calculando el valor de la ji-cuadrada asociada a las especificaciones y el valor de la ji-cuadrada asociada al proceso de la siguiente manera:

El valor de la ji-cuadrada asociada con las especificaciones de la variable X_1 viene dada por:

$$\chi^2_{\beta 1} = \frac{(X_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma||\Sigma_1^{-1}|} = \frac{(85 - 100)^2}{(275)(.0909)} = \frac{(115 - 100)^2}{(275)(.0909)} = 9$$

El valor de la ji-cuadrada asociada con las especificaciones de la variable X_2 viene dada por:

$$\chi^2_{\beta 2} = \frac{(X_2 - \mu_2)^2}{|\Sigma||\Sigma_2^{-1}|} = \frac{(32 - 100)^2}{(275)(.0909)} = \frac{(68 - 100)^2}{(275)(.0909)} = 9$$

Para este caso se obtiene un valor del $C_{pm} = 0.8722\ y\ C_{pkm} = 0.8772$

Ejemplo 2. Ahora dentro del escenario 1, el promedio del proceso no se encuentra localizado en el centro de las especificaciones. Para ejemplificar esta situación, consideremos que el promedio del proceso se deslizo y se encuentra localizado en $[105 \quad 55]$ y que la relación de varianzas covarianzas permanece igual. Para efectos del cálculo del C_{pm} como no importa donde se encuentre localizado el proceso, ubicamos su promedio en el valor nominal de las especificaciones, lo cual viene dado por $[100 \quad 50]$. El cálculo del índice de capacidad potencial sería igual que para la situación anterior y el valor que se obtendría seria el exactamente el mismo, es decir $C_{pm} = 0.8722$ mientras que el valor del $C_{pkm} = 0.58153$

Escenario 2

Ejemplo 3. En el ejemplo 1 del escenario 1, el promedio del proceso analizado en forma conjunta para ambas características de calidad estaba localizado justo en el valor de nominal de las especificaciones. En este caso el valor de ambos índices fue menor que 1, lo cual quiere decir que el proceso no es capaz de cumplir con ambas especificaciones simultáneamente, lo que significa que debe realizarse una mejora en el proceso, a través de una reducción en la variabilidad de las características de calidad. Dicha reducción en la

variación de ambas variables debe ser equivalente a $(C_{pm})(\sigma_i)$, para lograr tener un proceso con índices de capacidad igual a 1. De aquí se desprende que el vector de medias es el mismo, la matriz de varianzas covarianzas deberá reflejar la reducción en la variabilidad de ambas variables. La información requerida para realizar los cálculos se muestra enseguida:

$$\mu_0 = [100 \quad 50]$$

La estimación de las varianzas y covarianzas se muestra en la siguiente matriz, donde la nueva desviación estándar para la variable X_1, deberá ser $(0.8722)(5) = 4.361$ y para X_2 deberá ser $(0.8722)(6) = 5.2332$, de aquí que la matriz de varianzas covarianzas que refleja esta reducción en la variación es:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 19.0183 & 18.2576 \\ 18.2576 & 27.3864 \end{bmatrix}$$

Las especificaciones para cada una de las variables son: $X_1 = [85 \quad 115]$ y para $X_2 = [32 \quad 68]$, el determinante de la matriz de varianzas covarianzas es 187.5028 y la inversa de dicha matriz se muestra enseguida:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1461 & -0.0974 \\ -0.0974 & 0.1014 \end{bmatrix}$$

Realizando el cálculo de los índices se tiene que $C_{pm} = 1$ y para $C_{pkm} = 1$. Como se puede ver se obtuvieron los resultados esperados.

Conclusiones

Para el caso de características de calidad correlacionadas y no correlacionadas, que pueden modelarse a través de una distribución normal multivariada, resulta relativamente fácil el cálculo de estos índices de capacidad, además de que es aplicable para cualquier dimensión.

La interpretación del valor obtenido con los índices Cpm y $Cpkm$ es similar al caso univariado, de tal manera que si se obtiene en el Cpm un valor menor de 1, se entiende que el proceso no tiene capacidad potencial para producir el 100% de la producción dentro de especificaciones. Por otro lado si el valor del Cpm y $Cpkm$ son iguales, esto significa que el proceso está centrado en el valor nominal de las especificaciones.

Referencias

Ahmad, S.; Abdollahian, M.; Zeephongsekul, P. & Abbasi, B. (2009). Multivariate Nonnormal Process Capability Analysis. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 4, No. 7, pp. 757-765.

Bothe, D.R. (1992). A Capability Study for an Entire Product. *ASQC Quality Congress Transactions* Vol. 46, pp.172–178.

Castagliola P. & Castellanos, J.V. (2008). Process Capability Indices Dedicated to Bivariate non Normal Distributions. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 87-101.

Castagliola, P. & Castellanos, J.V. (2005). Capability Indices Dedicated to the Two Quality Characteristics Case. *Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 2, No. 2, pp. 201-220.

Foster, E.J.; Barton, R.R. & Gautam, N. (2005). The Process-Oriented Multivariate Capability Index. *International Journal of Production Research*, Vol. 43, No. 10, pp. 2135-2148.

Goethals, P.L. & Cho, B.R. (2011). The Development of a Target-Focused Process Capability Index with Multiple Characteristics. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 27, No. 3, pp. 297-311.

González, I. & Ismael, S. (2009). Capability Indices and Nonconforming Proportion in Univariate and Multivariate Process. *International J Adv. Manuf. Technol*, Vol. 44, pp. 1036-1050.

Juran, J.M. (1974). *Quality Control Handbook.* New York: McGraw-Hill.

Kane, V.E. (1986). Process Capability Indices, *Journal of Quality Technology*, Vol. 34, pp. 1-19.

Kotz, S. & Johnson, N.L. (2002). Process Capability Indices—A Review, 1992–2000. *Journal of Quality Technology*, Vol. 34, No. 1, pp. 2-19.

Montgomery, D. (2009). *Statistical Quality Control. A Modern Introduction.* 6th ed. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Pan, J.N. & Lee, C.Y. (2010). New Capability Indices for Evaluating the Performance of Multivariate Manufacturing Processes. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 26, No. 1, pp. 3-15.

Pearn, W.L.; Kotz, S. & Johnson, N.L. (1992). Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, No. 4, pp. 216-231.

Pearn, W.L.; Wang, F.K. & Yen, C.H. (2007). Multivariate Capability Indices: Distributional and Inferential Properties. *Journal of Applied statistics*, Vol. 34, No. 8, pp. 941-962.

Peña, D. (2002). *Análisis de Datos Multivariantes*. España: Interamericana de España, S.A. de C.V./McGraw-Hill.

Shahriari, H. & Abdollahzadeh, M. (2009). A New Multivariate Process Capability Vector. *Quality Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 290-299.

Shahriari, H. & Lawrence, F.P. (1995). A Multivariate Process Capability Vector. In: *4thIndustrial Engineering Research Conference* (pp. 304-309).

Shinde, R.L. & Khadse, K.G. (2009). Multivariate Process Capability using Principal Component Analysis. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 25, No. 1, pp. 69-77.

Spiring, F.; Leung, B.; Cheng, S. & Yeung, A. (2003). A Bibliography of Process Capability Papers. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 19, No. 5, pp. 445-460.

Taam, W.S.P. & Liddy, J.W. (1993). A Note on Multivariate Capability Indices. *Journal of Applied Statistics*, Vol. 20, No. 3, pp. 229-351.

Wang, C.H. (2005). Constructing Multivariate Process Capability Indices for Short-run Production. *International J Adv. Manuf. Technol*., Vol. 26, pp. 1306-1311.

Wang, F.K. (2006). Quality Evaluation of a Manufactured Product with Multiple Characteristic. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 22, pp. 225-236.

Wang, F.K. & Chen, J.C. (1998). Capability Index using Principal Components Analysis. *Quality Engineering*, Vol.11, No. 1, pp. 21-27.

Wang, F.K. & Du, T.C. (2000). Using Principal Component Analysis in Process Performance for multivariate data. *Omega*, Vol. 28, No. 2, pp. 185-194.

Wu, C.W.; Pearn, W.L. & Kotz, S. (2009). An Overview of Theory and Practice on Process Capability Indices for Quality Assurance. *International Journal of Production Economics*, Vol. 117, No. 2, pp. 338-359.

Yeh, A.B. & Chen, H. (2001). A Nonparametric Multivariate Process Capability Index. *International Journal of Modeling and Simulation*, Vol. 21, No. 3, pp. 218-223.

Yum, B.J. & Kim, K.W. (2011). A Bibliography of the Literature on Process Capability Indices: 2000–2009. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 27, No. 3, pp. 251-268.